Le virus brownien

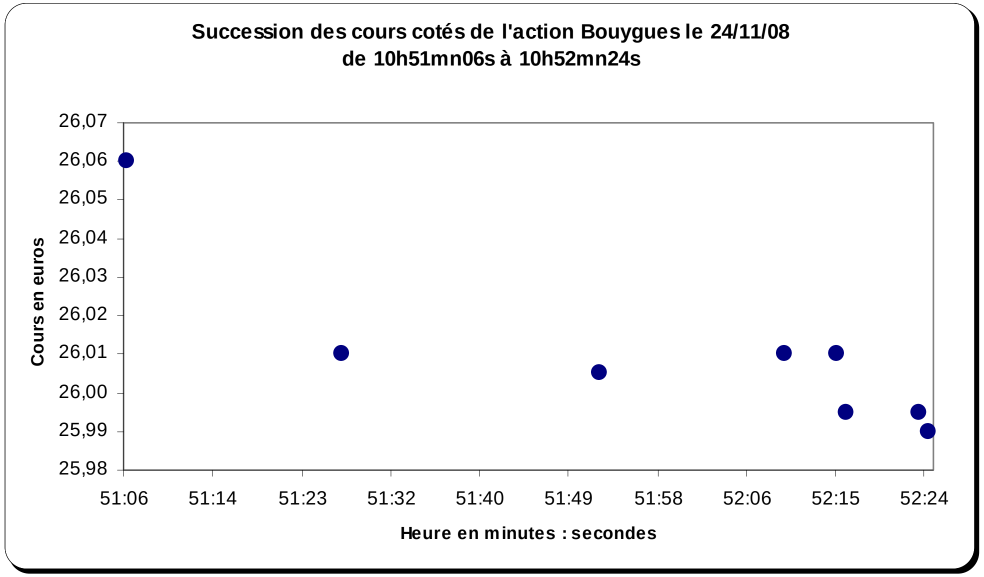
Christian Walter

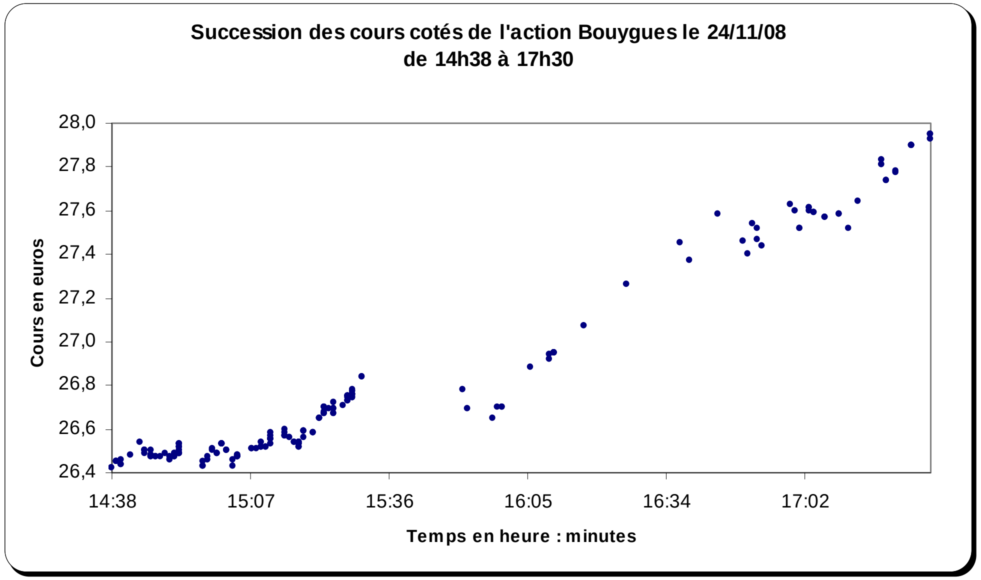
Professeur associé à l’IAE de l’université Paris 1 Panthéon-Sorbonne
Directeur de la chaire Éthique et finance de l’Institut Catholique de Paris

Présentation au colloque SFEV
5 octobre 2011

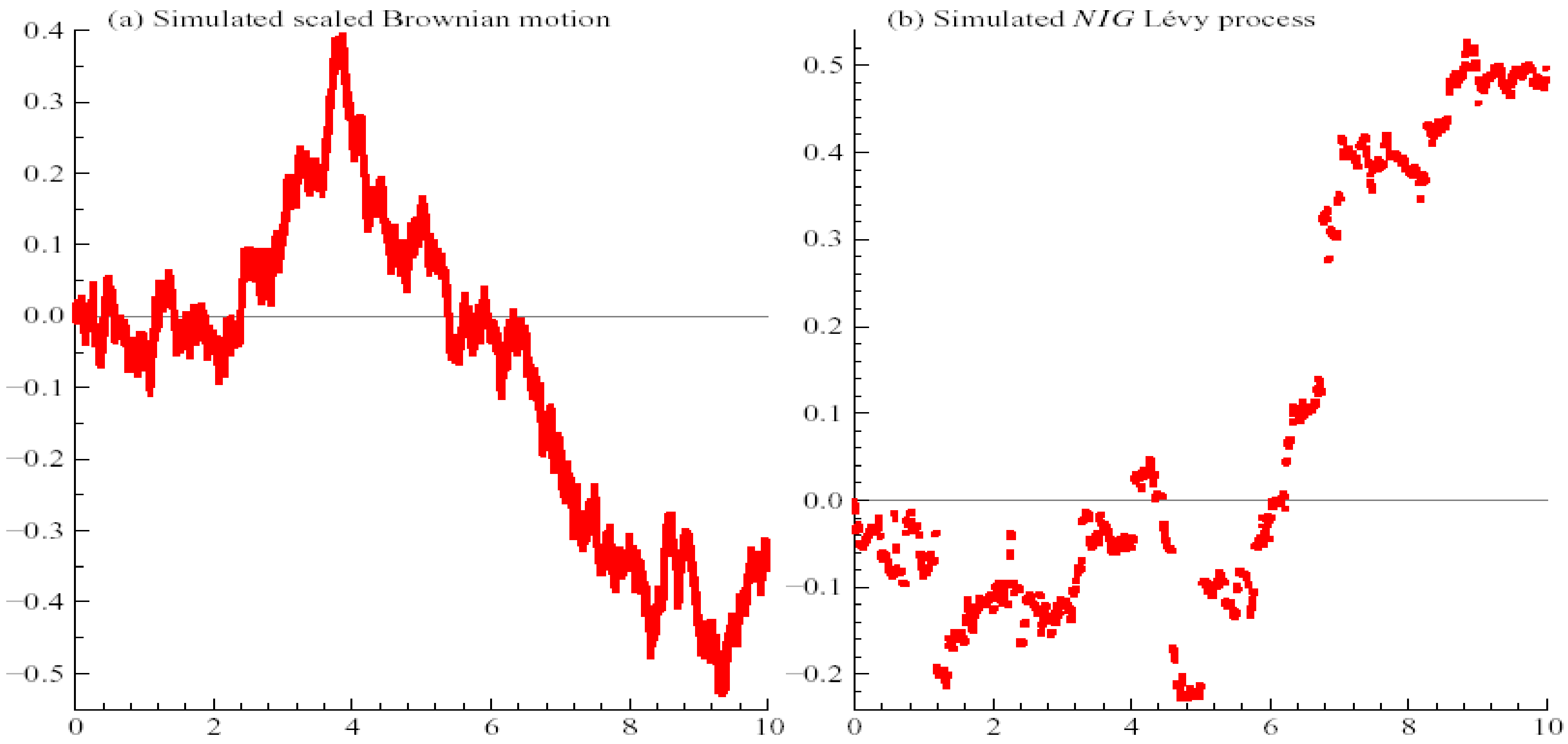
L'incertitude de la bourse : un exemple réel

Discontinuité +
désynchronisation





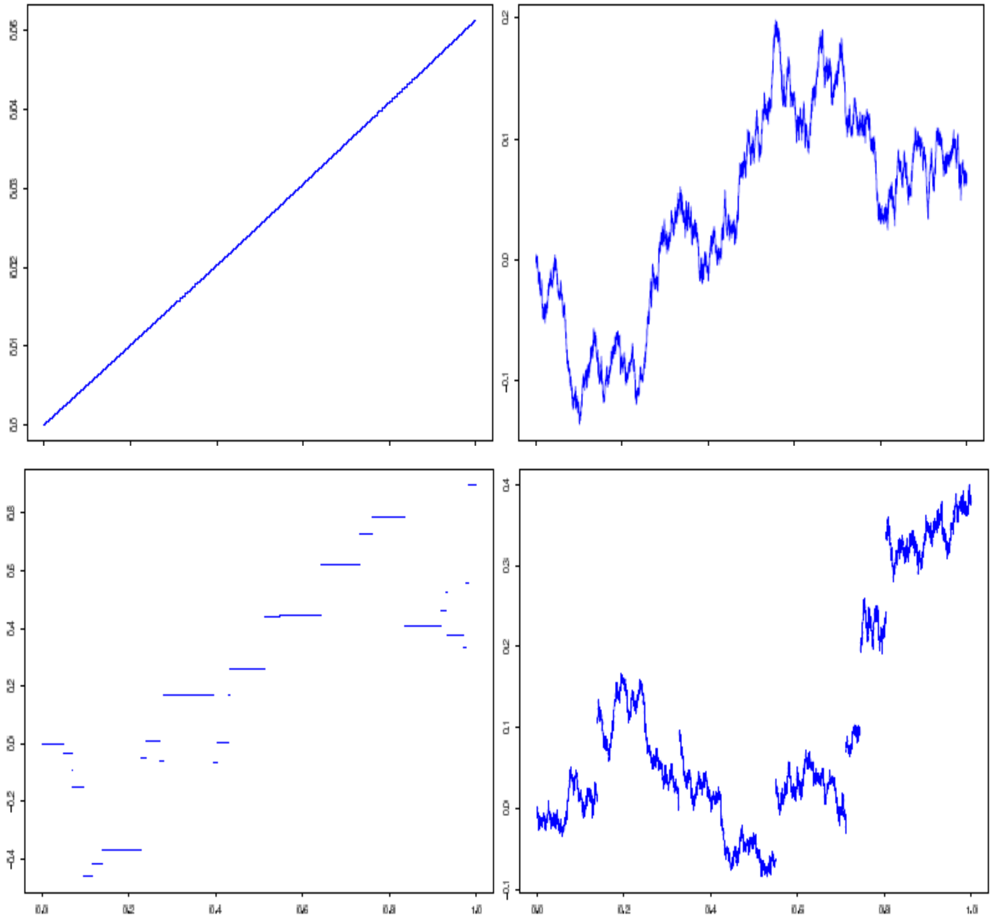
Deux exemples de marches au hasard simulées



H&Conseil W

Quelle représentation de l’incertitude choisir ?

Dynamique : trajectoires de **processus** discontinus

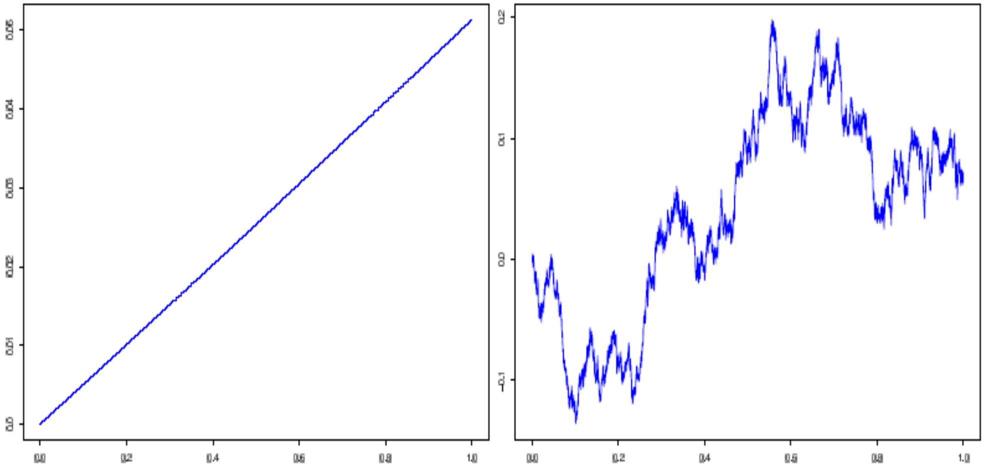


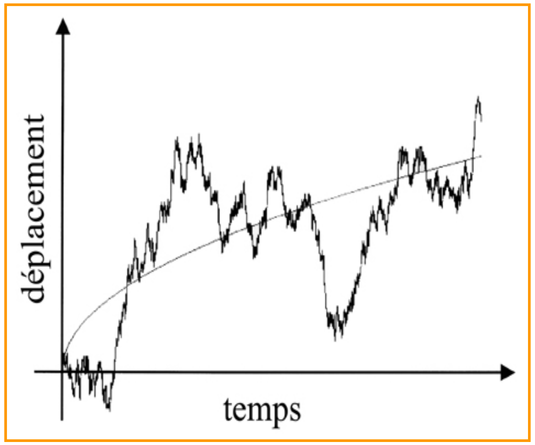
Continuité :
Dérive et diffusion suffisent

Discontinuités :
Au minimum une deuxième dimension de risque est nécessaire

Deux modèles de représentation : 1) La représentation brownienne (« virus B »)

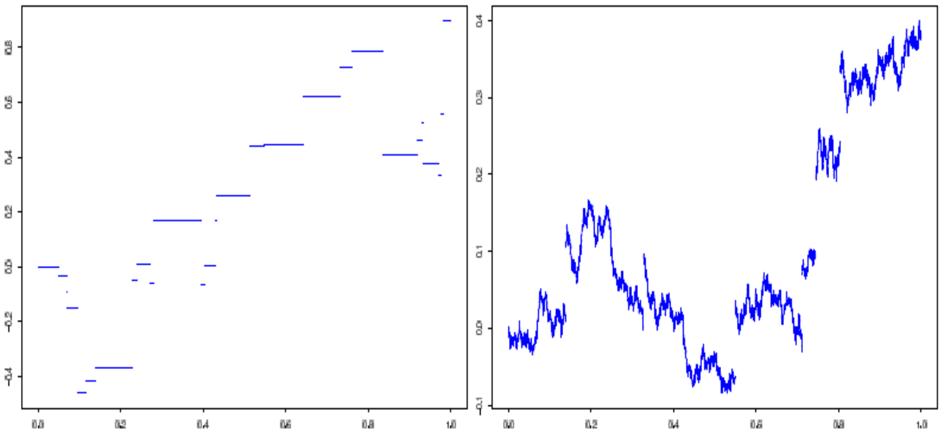
- **Une trajectoire brownienne est « lisse » : sans ruptures ni sauts**
  - Le mouvement brownien est entièrement défini par sa dérive et sa diffusion
  - L'exponentielle de mouvement brownien est le modèle standard des variations boursières
    - Bachelier (1900), Osborne (1959), Samuelson (1965)
  - La loi marginale du mouvement brownien est une gaussienne : la loi normale
  - Les calculs de risques en finance (VaR etc.) postulent tous des browniens
- **Les trajectoires boursières réelles présentent à la fois des ruptures et des emballements de marché**





2) Des représentations non browniennes qui restent des marches au hasard

- **Le mouvement brownien est un processus de Lévy simple**
  - Accroissements indépendants et stationnaires (i.i.d.)
  - Loi marginale indéfiniment divisible (conséquence de l'hypothèse i.i.d.)
  - Stable par addition (propriété fractale du mouvement brownien)
  - De variance finie (application du théorème central limite)
- **Les exponentielles de processus de Lévy non browniens permettent de bien modéliser les comportements boursiers réels**
  - Conservation de l'hypothèse i.i.d.
  - Lois marginales indéfiniment divisibles
  - Stables ou non stables
  - Avec ou sans moments



La formule générale de Lévy-Khintchine

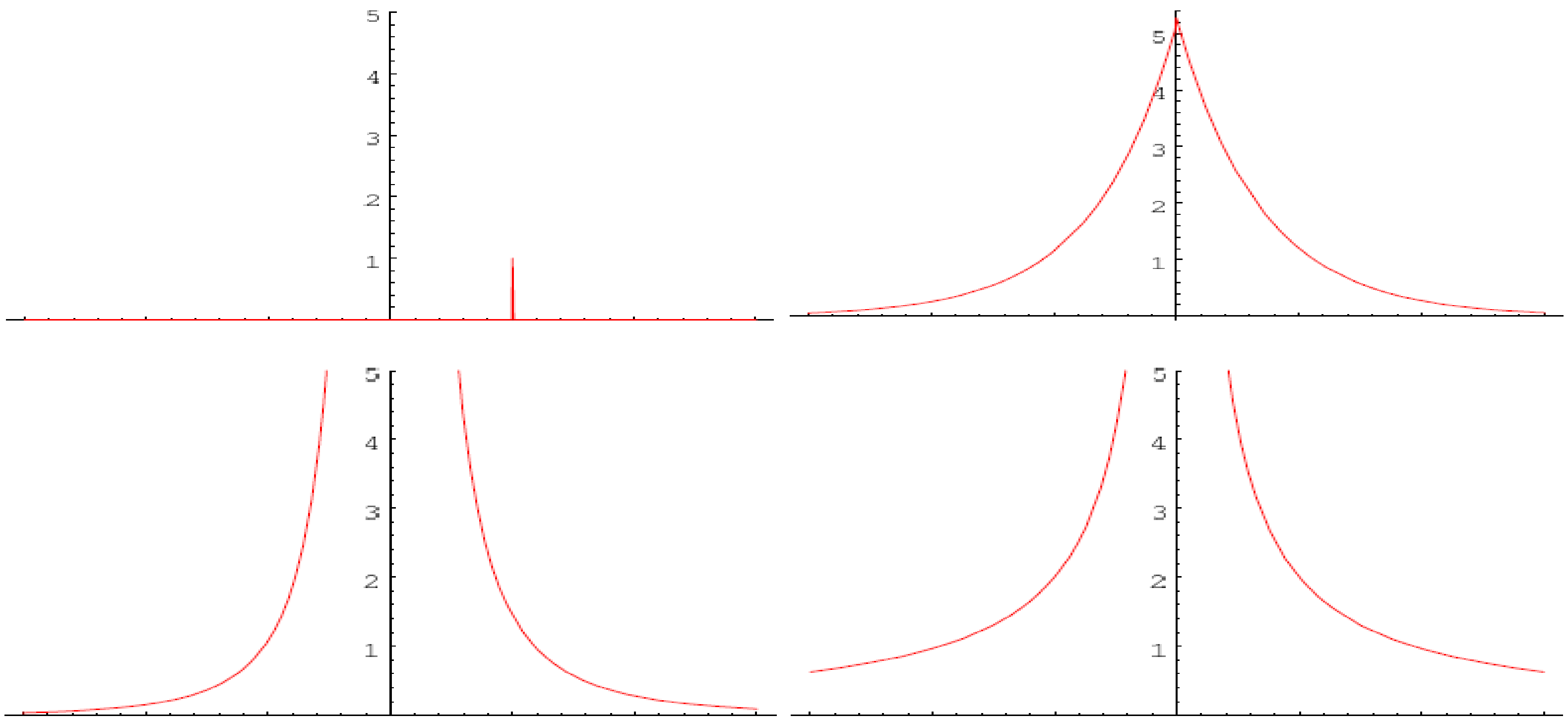
- **La forme générale de la fonction caractéristique de la loi de base est donnée par la formule de Lévy-Khintchine :**
  - Cette formule fait apparaître
    - La composante diffusive (partie brownienne)
    - La composante de sauts (partie non brownienne)
  - La mesure de Lévy
    - C'est l'élément essentiel de la modélisation
    - Elle règle les moments des distributions s'ils existent
    - Et le comportement des queues de distribution (budgets de risque)
- **Gérer les risques réels en gestion d'actifs revient à choisir et à calibrer une mesure de Lévy**
  - En particulier, le risque devient bidimensionnel : TAILLE – FORME
  - La « taille » du risque est donnée par la composante diffusive (la « volatilité »)
  - La « forme » du risque est donnée par la structure de la mesure de Lévy

TAILLE FORME

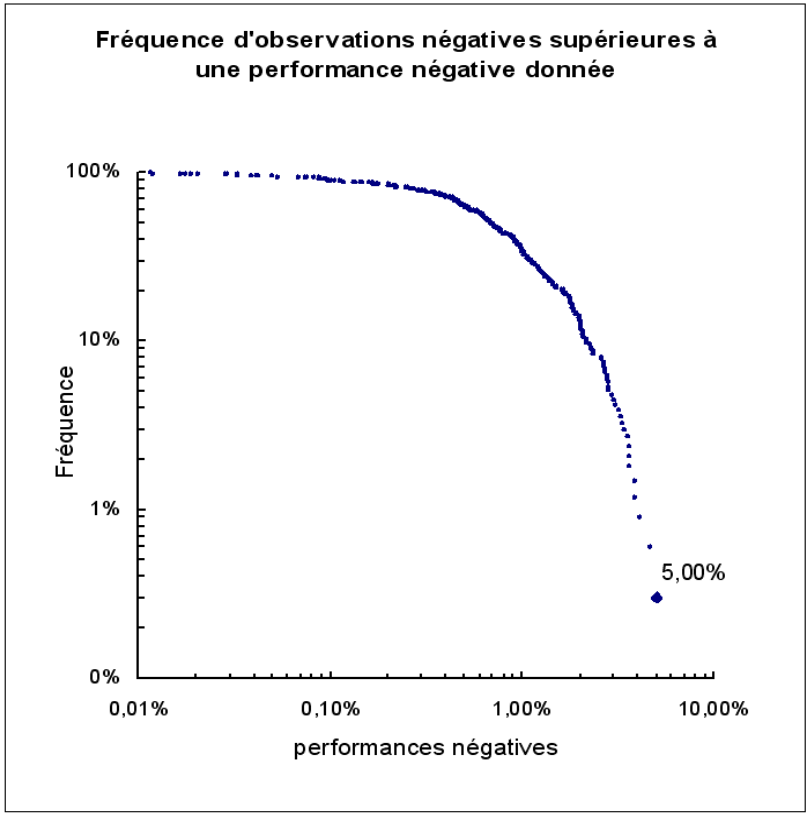
$$\Psi_{X_t}(u) = t\underbrace{\left(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right)}_{\text{TAILLE}} + t\underbrace{\int_{\mathbf{R}^*} \left(e^{iux} - 1 - iux\,\mathbf{1}_{|x|<1}(x)\right)\nu(dx)}_{\text{FORME}}$$

La mesure de Lévy et sa signification

- **La mesure de Lévy permet de quantifier la quantité de discontinuités et leur amplitude :**
  - L'activité d'un processus de Lévy est son taux moyen d'arrivée de sauts
  - La variation d'un processus de Lévy est la distance moyenne entre deux points



La trace des discontinuités dans les queues de distribution



Classement des données : graphique rang – amplitude

Une maladie de la pensée…

« Aux industriels qui n’ont cure de la justesse d’une formule pourvu qu’elle soit commode, nous rappellerons que l’équation simple, mais fausse, c’est tôt ou tard, par une revanche inattendue de la logique, l’entreprise qui échoue, la digue qui crève, le pont qui s’écroule ; c’est la *ruine financière*, lorsque ce n’est pas le sinistre qui fauche des vies humaines »

Pierre Duhem, 1893

Des conséquences sur la réglementation professionnelle